

Sobre os quantificadores generalizados

Hércules de Araujo Feitosa
UNESP, Faculdade de Ciências
haf@fc.unesp.br

Maria Claudia Cabrini Grácio
UNESP, Faculdade de Filosofia e Ciências
cabrini@marilia.unesp.br

Mauri Cunha do Nascimento
UNESP, Faculdade de Ciências
mauri@fc.unesp.br

1. Introdução

A questão da quantificação é um tema de investigação de diversas áreas, como Lógica, Lingüística, Matemática e Computação. Dentro da lógica clássica de primeira ordem, a quantificação é tratada por meio dos quantificadores universal e existencial, denominados *quantificadores lógicos*.

A lógica moderna tem sido desenvolvida a partir de construções sobre linguagens artificiais. Entre outros aspectos, estas investigações procuram estabelecer relações entre a linguagem artificial subjacente e as linguagens naturais: quais as vantagens em se tratar com uma linguagem artificial, quais são as suas limitações, quais as suas implicações para as inferências.

A fim de dar significado às expressões das linguagens artificiais, a lógica de primeira ordem considera estruturas matemáticas com certas particularidades algébricas, em que são escolhidos conjuntos arbitrários como o domínio de indivíduos para uma estrutura \mathcal{B} e relações e funções, que servem como interpretações para os símbolos de predicados, símbolos funcionais. Além disso, expressões construídas a partir dos operadores "não", "e", "ou", "se ..., então", e dos quantificadores "todo" e "existe", ou outros que possam ser expressos a partir destes, são as únicas relevantes.

A idéia básica que permeia as investigações na lógica de primeira ordem é que se pode estabelecer uma relação entre algumas estruturas matemáticas e algumas coleções de expressões de uma dada linguagem, ao descrever propriedades de tal estrutura. A noção é a de satisfação numa estrutura \mathcal{B} , ou seja, $\mathcal{B} \models \varphi$ se a expressão φ é verdadeira em \mathcal{B} ou é satisfeita em \mathcal{B} .

Contudo, apesar do caráter universal atribuído à Lógica, devemos reco-

nhecer que muitos conceitos matemáticos, assim como muitas expressões das linguagens naturais, não podem ser tratados dentro deste contexto teórico.

Neste trabalho, estamos interessados, particularmente, nas quantificações que não podem ser investigadas a partir dos quantificadores lógicos universal (\forall) e existencial (\exists). Esta insuficiência da lógica clássica de primeira ordem para tratar de diversos conceitos matemáticos e expressões da linguagem natural conduziu à criação de novos quantificadores distintos dos usuais que podem ser usados para duas vertentes: (i) a caracterização de aspectos matemáticos específicos ou (ii) para a análise de quantificadores presentes nas linguagens naturais que não podem ser definidos a partir dos lógicos tais como: muitos, poucos, quase todos, quase nenhum, a maioria, a minoria, ...

O trabalho de A. Mostowski, publicado em 1957 e intitulado *On a generalization of quantifiers*, constitui um marco no tratamento dos quantificadores matematicamente interessantes não definíveis em termos dos quantificadores universal e existencial, uma vez que trata com operadores que representam uma generalização natural dos quantificadores lógicos. Denomina esses quantificadores de *quantificadores generalizados*. Desde então, diversos trabalhos têm sido publicados sobre esse assunto.

Também nos estudos sobre teorias das linguagens naturais, a questão sobre quantificação toma um papel central. Segundo Bach *et alii* (1995), toda linguagem natural apresenta algum meio de fazer declarações gerais.

Tratando da relação entre quantificação em lógica e linguagem natural, Montague, em 1974, apresentou uma teoria que identifica expressões substantivas do inglês à noção de quantificadores generalizados.

Sob o aspecto do tratamento da quantificação na linguagem natural, o trabalho de Barwise e Cooper, publicado em 1981, e intitulado *Generalized quantifiers and natural language*, tem sido considerado um marco e referência. O trabalho de Barwise e Cooper reaproxima as investigações da lógica e da teoria da linguagem natural, uma vez que seguem a linha de tratamento de Montague e identificam expressões substantivas da linguagem natural à noção de quantificadores generalizados da lógica.

Neste trabalho apresentamos um pouco da história dos quantificadores generalizados e como têm sido investigados a partir da construção de lógicas estendidas, sob duas vertentes: contribuição para a caracterização de aspectos

matemáticos específicos e a segunda que trata da relação entre linguagem natural e quantificadores.

Tomaremos como ponto de partida para a perspectiva da contribuição para a caracterização de aspectos matemáticos específicos, o trabalho desenvolvido por Mostowski e para a perspectiva da relação entre linguagem natural e quantificadores, o trabalho de Barwise e Cooper.

Destacaremos, entre as contribuições para os estudos dos quantificadores generalizados, as lógicas moduladas – família de sistemas lógicos monotônicos que tratam de tipos particulares de quantificadores generalizados, a saber, quantificadores que expressam formas particulares de raciocínio indutivo, tratadas dedutivamente e que representam expressões da linguagem natural.

2. As lógicas estendidas por quantificadores generalizados

A motivação para a primeira vertente é a pergunta “O que é a lógica para conceitos matemáticos específicos?”, ou diretamente, dada uma propriedade matemática particular, como boa ordem, infinitude, continuidade, etc..., qual seria a lógica implícita no uso desta propriedade? Que tipos de estruturas isolam esta propriedade mais naturalmente? Que tipos de linguagens melhor espelham as noções matemáticas sobre a propriedade?

Assim, a teoria de modelos estendida toma a idéia básica e a expande em vários caminhos, produzindo estruturas matemáticas mais ricas ou com maior poder de expressão em sua linguagem ou ambas. Neste âmbito, uma lógica consiste de uma coleção de estruturas matemáticas, uma coleção de expressões formais e uma relação de satisfação entre ambas, ou, em outras palavras, lógica é algo construído para estudar a coerência de alguma parte da matemática.

A primeira proposta clara para se investigar as extensões da lógica de primeira ordem pelos métodos da teoria de modelos, é devida a Mostowski (1957). Desde que conceitos como finitude (infinitude) e enumerabilidade, importantes para a matemática moderna, não são definíveis na lógica de primeira ordem, o autor sugeriu a seguinte regra sintática:

- se $\varphi(x)$ é uma fórmula, então $\exists x\varphi(x)$ também é uma fórmula, em que x não ocorre livre nesta nova fórmula.

Esta regra de formação é acrescida de forma a poder interagir com "e",

"ou", "não", "se ..., então", "todo" e "existe".

O significado de Q depende de uma nova regra semântica que, em geral, se procede da forma:

• dado um cardinal \aleph_α , obtém-se uma lógica $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ definida pela seguinte semântica:

$\mathcal{B} \models Qx\varphi(x)$ se existem pelo menos \aleph_α elementos b , tais que $\mathcal{B} \models \varphi(b)$.

Assim, a lógica $\mathcal{L}(Q_0)$ contempla a distinção finito/infinito não constante na lógica de primeira ordem; a lógica $\mathcal{L}(Q_1)$, por outro lado, contempla a distinção contável/não contável, também ausente na lógica de primeira ordem.

Segundo Mostowski, o problema da completude para uma linguagem contendo um conjunto de quantificadores Q_1, \dots, Q_s é equivalente a sabermos se o conjunto de fórmulas verdadeiras é recursivamente enumerável.

Mostowski deixou muitos problemas em aberto sobre suas lógicas com quantificadores generalizados, particularmente se é possível o estabelecimento de um cálculo formal no qual seja possível demonstrar todas as sentenças que envolvessem esses novos quantificadores introduzidos.

Em 1966, no *artigo First order predicate logic with generalized quantifiers*, Lindström redefiniu o conceito e estudou as lógicas estendidas por quantificadores em estrutura semântica um pouco mais geral, embora ainda não tenha logrado sucesso completo em introduzir axiomas e estrutura que permitissem uma demonstração da completude para $\mathcal{L}(Q)$.

A compacidade é definida por:

Compacidade forte: Se Δ é um conjunto de sentenças da lógica e se todo subconjunto finito de Δ tem um modelo, então Δ tem um modelo;

Compacidade contável: Se Δ é um conjunto de sentenças da lógica e se todo subconjunto contável de Δ tem um modelo, então Δ tem um modelo.

Existem pelo menos duas razões pelo interesse nestes resultados. A primeira por eles estarem intimamente relacionados ao problema da **completude**. Usualmente, o teorema da completude estabelece que se φ é uma conseqüência lógica de algum conjunto (possivelmente contável) Δ de hipóteses, então φ é derivável a partir de algum subconjunto finito de Δ . Em particular, se Δ é inconsistente, ou seja, não tem modelo, então alguma sentença contraditória é uma conseqüência de

Δ e, neste caso, algum subconjunto finito de Δ é inconsistente. Desta forma, a compacidade, nas duas versões, concorda com a completude, se esta existir.

A segunda razão é que em uma teoria de modelos de primeira ordem, o teorema da compacidade é ferramenta solicitada em diversos desenvolvimentos. Com isso, quando presente, muito da teoria de modelos de primeira ordem pode ser recuperada.

Fuhrken (1964) demonstrou que o teorema da compacidade vale para $\mathcal{L}(Q)$, em que Q é interpretado por “existem incontavelmente muitos x ”. Vaught (1965) demonstrou que o conjunto das fórmulas válidas de $\mathcal{L}(Q)$ é recursivamente enumerável e, posteriormente, forneceu uma prova da completude com uma coleção um pouco complexa de axiomas. Estes resultados foram refinados, mas em Keisler (1970) está uma demonstração da correção e completude para $\mathcal{L}(Q)$ em um sistema bastante natural e intuitivo.

Este caminho estimulou muitos trabalhos sobre lógicas com quantificadores generalizados para tratar de certas estruturas matemáticas. Podemos mencionar os trabalhos sobre lógicas topológicas de Sgro (1977), que desenvolve um sistema formal de primeira ordem para a representação do conceito de espaço topológico, em que a linguagem do cálculo de predicados é ampliada, pelo acréscimo do quantificador Q , interpretado por $Qx\varphi(x) \equiv$ “o conjunto definido por $\varphi(x)$ é ‘aberto’”. E também o de Garavaglia (1978) que também desenvolve uma teoria de primeira ordem para a formalização do conceito de espaços topológicos, com semântica baseada em variáveis sortidas.

Também tratando de quantificadores generalizados, em 1962, Rescher apresenta axiomática e semântica para o quantificador generalizado (M), capturando a noção de maioria, interpretando M por meio da noção de cardinal: uma propriedade C ocorre para a maioria dos indivíduos do universo se para o conjunto $[C] = \{a \in A / C(a)\}$ temos $|[C]| > |[C]^c$. Trabalhos considerando esta noção estão desde então na literatura. Peterson (1979) analisa o relacionamento entre “poucos”, “muitos”, “todos” e “alguns” por meio de quadrados (no sentido do quadrado de Aristóteles). Em Slaney (1988), apresentam-se argumentos demonstrando a não existência de um sistema de dedução natural com regras finitas para um quantificador relacionado a M , que capture a noção de “a maioria dos F 's são G 's”, sintaticamente dada pela fórmula $(Mx, Fx)Gx$. Por meio dos

desenvolvimentos presentes em Mostowski (1957), mostra-se que o sistema de Rescher (1962) é incompleto (Grácio, 1999).

Antes de abordarmos a outra vertente, consideramos relevante indicar outro resultado de Lindstrom (1969) que impõe novas reflexões sobre as lógicas estendidas.

Para se estabelecer o que torna uma lógica estendida natural ou o que permite encontrar lógicas úteis e interessantes, a experiência tem mostrado que algum dos próximos três princípios deve ser seguido:

- (i) construir dentro da semântica natural, uma linguagem que revele as noções importantes de algum domínio particular da atividade matemática;
- (ii) manter a semântica restrita ao campo das noções relevantes ao estudo e conceitos implícitos a estas noções;
- (iii) encontrar uma sintaxe em que as noções básicas possam ser expressas naturalmente.

De qualquer maneira, quando se sai do escopo da lógica de primeira ordem clássica com o objetivo de contornar alguma dificuldade, alguns resultados desta são perdidos. Em particular, teoremas sobre conceitos não definíveis na lógica de primeira ordem são falhos nas teorias estendidas.

Lindstrom demonstrou, em 1969, o teorema segundo o qual nenhuma extensão própria da lógica clássica de primeira ordem, usando modelos padrões, pode ter ambas as propriedades compacidade contável e de Lowenheim-Skolem. Este resultado abriu novos aspectos no estudo da lógica, impondo reflexões sobre as lógicas estendidas.

Com isso, a lógica de primeira ordem pode ser caracterizada como uma fortíssima lógica, na qual são satisfeitos as duas propriedades:

Propriedade da Compacidade Contável: se um conjunto contável de sentenças Δ não tem um modelo, então algum subconjunto finito de Δ não tem modelo;

Propriedade de Lowenheim: se uma sentença tem um modelo infinito, então tem um modelo contável.

Os teoremas da Compacidade e de Lowenheim-Skolem são dois dos mais notáveis resultados em teoria de modelos de primeira ordem e ferramentas muito usadas por investigadores do assunto. Assim, esse teorema afirma que no interesse pelas extensões da lógica de primeira ordem, usando modelos padrões, deve-se abandonar uma de suas mais acalentadas ferramentas.

3. Quantificadores generalizados e a linguagem natural

Em 1974, Montague, tratando da relação entre linguagem natural e quantificadores, apresentou uma teoria que unifica ou identifica expressões substantivas do inglês, como “todos os pássaros”, “Maria”, “ela”, à noção de quantificadores generalizados.

Barwise e Cooper (1981), seguindo Montague, tratam da identificação entre essa categoria sintática (expressões substantivas) da linguagem natural e os quantificadores generalizados da lógica, contribuindo para uma reaproximação entre lógica e linguagem natural, o que atraiu o interesse de lingüistas e cientistas da computação.

Barwise e Cooper argumentaram que os quantificadores da lógica clássica de primeira ordem são inadequados para tratar das sentenças quantificadas da linguagem natural em pelo menos dois aspectos:

- nas linguagens naturais existem sentenças quantificadas que não podem ser expressas através dos quantificadores \exists e \forall . Desta maneira, uma teoria semântica para a linguagem natural não pode ser baseada em uma lógica restrita ao cálculo clássico de predicados.
- a estrutura sintática das sentenças quantificadas nas linguagens naturais é muito diferente da estrutura sintática das sentenças quantificadas na lógica clássica de primeira ordem.

A idéia central de Barwise e Cooper é que os quantificadores correspondem a frases substantivas da linguagem natural.

Assim, um quantificador tem a forma sintática $D\eta$, em que D é um determinador e η é um conjunto de termos, ou ainda, um conjunto de indivíduos.

Mais especificamente, consideremos um modelo $\mathcal{M} = (E, \|\ \|\)$, em que E é o domínio e $\|\ \|\$ é uma função de atribuição. Neste caso, $\|D\eta(X)\|$ denota um conjunto de conjunto de indivíduos dados pelos subconjuntos X de E para os quais a expressão $D\eta(X)$ vale.

Alguns dos determinadores mais usuais como *todos*, *alguns*, *muitos* e *exatamente um* são dados da seguinte forma:

$$\|\text{todos } \eta\| = \{X \subseteq E / \|\eta\| \subseteq X\}$$

$$\|\text{alguns } \eta\| = \{X \subseteq E / \|\eta\| \cap X \neq \emptyset\}$$

$$||\text{muitos } \eta|| = \{X \subseteq E / ||\eta|| \cap X | > | ||\eta|| - X |\}$$

$$||\text{exatamente um } \eta|| = \{X \subseteq E / ||\eta|| \cap X = 1\}.$$

Desde que $||D\eta|| = ||D||(||\eta||)$, então os determinadores denotam funções de $\mathcal{P}(E)$ em $\mathcal{P}\mathcal{P}(E)$, como no caso de $||\text{nenhum}||$:

$$||\text{nenhum}||(Y) = \{X \subseteq E / Y \cap X = \emptyset\}.$$

Os demais quantificadores generalizados podem ser definidos nesta acepção, como o quantificador Q_1 de Mostowski ou o quantificador da maioria de Rescher:

$$||Q_1\eta|| = \{X \subseteq E / ||\eta|| > \omega\}$$

$$||\text{a maioria } \eta|| = \{X \subseteq E / ||\eta|| > ||E - X||\}.$$

Elementos desta teoria que se iniciou com Barwise e Cooper (1981) estão em muitos trabalhos sobre os quantificadores generalizados como em Westerstahl (1984 e 1985), Van Benthem (1984), Keenan e Stavi (1986), Van Benthem e Westerstahl (1995) e Keenan (2002).

Aplicações dos quantificadores generalizados em contextos computacionais conduziram muitos investigadores a imaginar que o melhor ambiente para o seu tratamento seria a partir de lógicas não monotônicas, como em Reiter (1980).

Diante deste contexto, surgiram algumas contribuições interessantes de pensadores brasileiros. Sette, Carnielli e Veloso (1999) introduziram uma lógica monotônica na qual poderiam ser interpretados os quantificadores naturais “quase todos (ou geralmente)” por meio de filtros primos e argumentaram ser esta uma alternativa mais produtiva que os contextos não monotônicos.

A partir destas perspectivas, Grácio (1999) introduziu uma família de sistemas lógicos, a família das *lógicas moduladas*, que serão mais detalhadas na próxima seção. Cada lógica modulada é caracterizada, sintaticamente, pela inclusão de novos quantificadores generalizados, os *quantificadores modulados*, na linguagem da lógica de primeira ordem. Semanticamente, tais quantificadores são interpretados por subconjuntos do conjunto das partes do universo.

Grácio introduziu dois novos sistemas lógicos monotônicos, indicados para a formalização das seguintes noções de quantidades: “muitos” e “para uma

‘boa’ parte”, semanticamente interpretados, respectivamente, pelas noções de *família fechada superiormente e topologia reduzida*.

4. As lógicas moduladas

A família das *lógicas moduladas* é caracterizada pela inclusão, na linguagem da lógica clássica de primeira ordem, de um quantificador generalizado Q , chamado de *quantificador modulado*, o qual deve ser interpretado por um subconjunto \mathbf{Q} do conjunto das partes do universo. Intuitivamente, este subconjunto \mathbf{Q} representa um conjunto arbitrário de proposições sustentadas por evidências, dentro de uma base de conhecimento. A seguir apresentamos a formalização das lógicas moduladas, denotadas por $\mathcal{L}(Q)$.

Seja L a linguagem de primeira ordem de tipo τ , que contenha símbolos para predicados, funções e constantes, seja fechada para os operadores lógicos $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ e também para os quantificadores \exists e \forall .

A extensão da lógica de primeira ordem \mathcal{L} , obtida pela inclusão de um quantificador generalizado Q , denominado *quantificador modulado*, é denotada por $\mathcal{L}(Q)$.

As fórmulas (e sentenças) de $\mathcal{L}(Q)$ são aquelas de \mathcal{L} acrescidas das fórmulas geradas pela cláusula seguinte:

- se φ é uma fórmula em $\mathcal{L}(Q)$, então $(Qx)\varphi$ é uma fórmula de $\mathcal{L}(Q)$.

Os conceitos de variável livre e variável ligada, numa fórmula, são estendidos ao quantificador Q , isto é, se x é livre em φ , então x ocorre ligada em $(Qx)\varphi$.

Denotamos por $\varphi(t/x)$ o resultado da substituição de todas as ocorrências livres da variável x pelo termo t em φ . Por simplicidade, quando não houver confusão, escrevemos apenas $\varphi(t)$ em vez de $\varphi(t/x)$.

A semântica das lógicas moduladas é definida como segue.

Seja \mathcal{A} uma estrutura clássica de primeira ordem, com domínio A , e \mathbf{Q} um conjunto de subconjuntos de A , tal que $\emptyset \notin \mathbf{Q}$, isto é, $\mathbf{Q} \subseteq \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$. A *estrutura modulada* para $\mathcal{L}(Q)$, indicada por $\mathcal{A}^{\mathbf{Q}}$, é determinada pelo par $(\mathcal{A}, \mathbf{Q})$.

Veloso (1998) chama esse tipo de estrutura de *estrutura complexa* e

Keisler (1970) de *estrutura fraca*.

A interpretação dos símbolos relacionais, funcionais e constantes individuais de $\mathcal{L}(Q)$ é a mesma de \mathcal{L} em \mathcal{A} .

A *satisfação* de uma fórmula de $\mathcal{L}(Q)$ numa estrutura \mathcal{A}^Q é definida recursivamente, do modo usual, acrescentando-se a cláusula seguinte:

• seja φ uma fórmula cujo conjunto de variáveis livres esteja contido em $\{x\} \cup \{y_1, \dots, y_n\}$ e consideremos uma seqüência $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ em A . Então:

$$\mathcal{A}^Q \models (Qx)\varphi[x, \bar{a}] \text{ se } \{b \in A / \mathcal{A}^Q \models \varphi[b, \bar{a}]\} \in \mathbf{Q}.$$

Neste caso, $\mathcal{A}^Q \models \psi[\bar{e}]$ denota que $\mathcal{A}^Q \models_s \psi$, quando as variáveis livres da fórmula ψ ocorrem no conjunto $\{z_1, \dots, z_n\}$, $s(z_i) = e_i$ e $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Desde que $A \neq \emptyset$, se x não ocorre livre em φ , então $\mathcal{A}^Q \models (Qx)\varphi[\bar{a}]$ se $\mathcal{A}^Q \models \varphi[\bar{a}]$. Em particular, para uma sentença $(Qx)\sigma(x)$, temos $\mathcal{A}^Q \models (Qx)\sigma(x)$ se $\{a \in A / \mathcal{A}^Q \models \sigma(a)\} \in \mathbf{Q}$.

Conforme já mencionamos, identificando o conjunto \mathbf{Q} com estruturas matemáticas, Grácio (1999) formalizou proposições da forma “maioria”, “muitos” e “para uma ‘boa’ parte”. A lógica dos ultrafiltros, introduzida em Sette, Carnielli e Veloso (1999) e Carnielli e Veloso (1997), formaliza proposições do tipo “quase todos” ou “geralmente”, e também deve ser considerada uma particularização das lógicas moduladas.

Como podemos observar, as noções de verdadeiro e falso, associadas aos quantificadores modulados, não depende apenas da lógica subjacente, mas de qual medida (quantificação) estamos usando e que “[...] deve ser incluída como parte do modelo antes que as sentenças tenham qualquer valor de verdade estabelecido” (Barwise, Cooper, 1981, p. 163).

As noções semânticas usuais, tais como modelo, validade, conseqüência lógica, etc., para estes sistemas, podem ser apropriadamente adaptadas.

Os axiomas de $\mathcal{L}(Q)$ são aqueles de \mathcal{L} , com os axiomas da identidade, acrescentados dos seguintes axiomas para o quantificador Q :

$$(Ax_1) (\forall x)\varphi(x) \rightarrow (Qx)\varphi(x)$$

$$(Ax_2) (Qx)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\varphi(x)$$

$$(Ax_3) (\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow ((Qx)\varphi(x) \leftrightarrow (Qx)\psi(x))$$

$$(Ax_4) (Qx)\varphi(x) \leftrightarrow (Qy)\varphi(y).$$

Intuitivamente, dada uma interpretação com universo A e as fórmulas φ , ψ , com exatamente uma variável livre x , então para os conjuntos $[\varphi] = \{a \in A / \varphi[a]\}$ e $[\psi] = \{a \in A / \psi[a]\}$, o axioma (Ax_1) afirma que se todos os indivíduos satisfazem φ , então o universo de discurso A , pertence à família de subconjuntos \mathbf{Q} de A que interpreta o quantificador Q . O axioma (Ax_2) afirma que o conjunto vazio não pertence a \mathbf{Q} . O axioma (Ax_3) afirma que se $[\varphi]$ e $[\psi]$ são idênticos, então um deles pertence à família \mathbf{Q} que interpreta Q se, e somente se, o outro também pertence a \mathbf{Q} .

As regras lógicas das lógicas moduladas são as regras usuais de \mathcal{L} : *Modus Ponens* (MP) e *Generalização* (Gen).

Outros axiomas devem ser introduzidos para caracterizar lógicas moduladas específicas, como pode ser visto em (Grácio, 1999).

As noções sintáticas usuais para $\mathcal{L}(Q)$ como sentença, demonstração, teorema, consequência lógica, consistência e outras são definidas de modo análogo às definidas na lógica clássica.

Em Grácio (1999), encontramos demonstração da completude das particularizações das lógicas moduladas – “muitos indivíduos” e “para uma boa parte dos indivíduos”, com respeito às estruturas matemáticas que as interpretam. Os teoremas da compacidade e Löwenheim-Skolem podem ser adaptados para essas versões das lógicas moduladas. Este fato é explicado pelo fato de estes sistemas usarem uma noção não-padrão de modelo, pela presença de estruturas matemáticas adicionais no modelo.

5. Considerações finais

Neste trabalho abordamos a questão dos quantificadores generalizados sob duas vertentes: sua contribuição para a caracterização de aspectos matemáticos específicos e a segunda que trata da relação entre linguagem natural e quantificadores.

As lógicas moduladas, que têm sido nosso objeto de estudo, contribuem para os estudos de ambas as vertentes. Sob o aspecto da caracterização de aspectos matemáticos específicos, os quantificadores modulados são interpretados por

estruturas matemáticas, como família fechada superiormente, ligada à noção de filtro principal, e topologia reduzida, ligada à noção de vizinhança densa. Essa família de sistemas lógicos se constitui como uma extensão conservativa da lógica clássica, com a qual compartilha algumas propriedades, como o fato de ser um sistema dedutivo simples, correto e completo.

Sob a vertente da relação entre linguagem natural e quantificação, as lógicas moduladas contribuem para a compreensão das relações entre lógica e linguagem, uma vez que tratam de quantificadores presentes na linguagem natural e não passíveis de serem formalizados na lógica clássica de primeira ordem.

Consideramos que essa família de sistemas lógicos colabora, ainda, com uma outra vertente da questão dos quantificadores generalizados, que aborda a quantificação como formas particulares de raciocínio indutivo.

A noção central das Lógicas Moduladas apresenta-se bastante frutífera para essa vertente, pois possibilita formular, sob o mesmo ponto de vista, diversos sistemas que se proponham a formalizar raciocínio indutivo.

Informalmente, o quantificador modulado colocado à frente de uma proposição indica que a proposição em seu escopo descreve uma crença (proposição sustentada pelas evidências) gerada por uma forma particular de raciocínio indutivo. Em cada sistema, o conjunto de indivíduos que satisfaz a proposição sob o escopo do quantificador modulado é considerado um conjunto de evidências adequado para realizar o tipo de argumento indutivo a que o quantificador se propõe.

Consideramos que essa terceira vertente está estreitamente relacionada com a questão da linguagem natural, uma vez que os quantificadores em linguagem natural podem ser pensados como uma representação da experiência do indivíduo/sociedade, que por sua vez leva-nos à questão da indução.

As lógicas moduladas contribuem, assim, para uma aproximação entre a perspectiva dos quantificadores generalizados enquanto forma particular de raciocínio indutivo e os quantificadores generalizados como na linguagem natural, que até o momento nos parece estarem sendo tratadas de forma estanque, como se não houvesse dependência entre elas.

Agradecimentos:

Agradecemos a Fapesp pelo apoio à pesquisa que nos tem sido destinado através dos processos 2005/00408-3 e 2004/14107-2.

Referências bibliográficas:

- BACH, E.; JELINEK, E.; KRATZER, A.; PARTEE, B. H. Introduction. In: BACH, E.; JELINEK, E.; KRATZER, A.; PARTEE, B. H. (Ed.) *Quantification in natural languages*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Netherlands, p. 1-11, 1985.
- BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy*, v. 4, 159-219, 1981.
- CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. A. S. Ultrafilter logic and generic reasoning. In: PROCEEDINGS OF KURT GÖDEL COLLOQUIUM, v. 5. Berlin: Springer-Verlag. p. 34-53, 1997.
- GARAVAGLIA, S. Model theory of topological structures. *Annals of Mathematical Logic*, v. 14, p. 13-37, 1978.
- GRÁCIO, M. C. C. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese de Doutorado, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 1999. 194 p.
- KEENAN, E. L. Some properties of natural language quantifiers: generalized quantifier theory. *Linguistics and Philosophy*, v. 25, p. 627-654, 2002.
- KEENAN, E. L.; STAVI, J. A semantic characterization of natural language determiners. *Linguistics and Philosophy*, v. 9, p. 253-326, 1986.
- KEISLER, H. J. Logic with the quantifier “there exist uncountably many”. *Annals of Mathematical Logic*, v. 1, p. 1-93, 1970.
- LINDSTRÖM, P. First order predicate logic with generalized quantifiers. *Theoria*, v. 32, p. 186-195, 1966.

- MONTAGUE, R. *Formal philosophy, selected papers of Richard Montague*. Edited and with an introduction by Richmond H. Thomason. New Haven: Yale University Press, 1974. 369 pp.
- MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae*, v. 44, p. 12-36, 1957.
- PETERSON, P. L. On the logic of “few”, “many”, and “most”. *Notre Dame Journal Logic*, v. 20, p. 155-79, 1979.
- REITER, R. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, v. 13, p. 81-132, 1980.
- RESCHER, N. Plurality-quantification. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 27, p. 373-4, 1962.
- SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. An alternative view of default reasoning and its logic. In: HAUESLER, E. H.; PEREIRA, L. C. (Ed.) *Pratica: Proofs, types and categories*. Rio de Janeiro: PUC-RJ, Brazil. p. 127-158, 1999.
- SGRO, J. Completeness theorems for topological models. *Annals of Mathematical Logic*, v. 11, p. 173-93, 1977.
- SLANEY, J. A note on “most”. *Analysis*, v. 48, p. 134-5, 1988.
- VAN BENTHEM, J. Questions about quantifiers. *The journal of symbolic logic*, v. 49, n. 2, p. 443-466, 1984.
- VAN BENTHEM, J.; WESTERSTAHL, D. Directions in generalized quantifier theory. *Studia Logica*, v. 55, p. 389-419, 1985.
- VAUGHT, R. The Löwenheim Skolem Theorem. *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, p. 81-89, 1965.
- WESTERSTAHL, D. Logical constants in quantifier languages. *Linguistics and Philosophy*, v. 8, p.387-413, 1985.
- WESTERSTAHL, D. Some results on quantifiers. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 25, n. 2, p.152- 170, 1984.